LA CONJETURA DE COLLATZ: ANÁLISIS Y VARIACIONES

Una exploración de las estructuras subyacentes y sus implicaciones matemáticas

Por Miquel Cerdà Bennassar Pollença, Illes Balears

RESUMEN

Este documento unifica y sintetiza mis investigaciones sobre la conjetura de Collatz, desarrolladas entre 2018 y 2019. Partiendo de un análisis estructural de las secuencias generadas por el algoritmo clásico, propongo una variación que revela propiedades fundamentales hasta ahora no evidentes. Se demuestra que el comportamiento aparentemente caótico de las secuencias de Collatz tiene su origen en el tratamiento uniforme de los números impares, y que al distinguir entre diferentes tipos de impares según su forma residual, emerge una estructura ordenada y predecible. Este enfoque proporciona nuevas perspectivas sobre la naturaleza fractal del problema y sugiere posibles caminos hacia su demostración.

1. INTRODUCCIÓN: LA CONJETURA CLÁSICA

La conjetura de Collatz, formulada por Lothar Collatz en 1937, establece lo siguiente:

Tomando cualquier número natural, si es par, lo dividimos entre dos; si es impar, lo multiplicamos por tres y le sumamos uno. Repitiendo este proceso con cada resultado obtenido, la conjetura postula que siempre llegaremos a la secuencia 4, 2, 1, entrando en un ciclo del que no se sale.

A pesar de su aparente simplicidad, este problema ha resistido los intentos de demostración formal durante más de 80 años, convirtiéndose en uno de los enigmas más intrigantes de la matemática contemporánea.

2. ESTRUCTURA FUNDAMENTAL DE LOS NÚMEROS

Para entender el problema, es fundamental analizar la estructura de los números naturales. Todo número natural puede expresarse como el producto de una potencia de dos y su mayor divisor impar:

$N = 2^n * m$

Donde m es un número impar.

Esta descomposición nos permite clasificar los números según su potencia de dos:

- $2^0 * (2n-1)$ son todos los números impares
- $2^1 * (2n-1)$ son los números pares de la forma $2*(2n-1)$
- $2^2 * (2n-1)$ son los números pares de la forma $4*(2n-1)$
- Y así sucesivamente...

3. COMPORTAMIENTO DE LAS SECUENCIAS DE COLLATZ

3.1 Papel de los números pares e impares

Al aplicar el algoritmo de Collatz, se observa que los números pares funcionan como "puentes" entre números impares. Todo número par, tras suficientes divisiones entre 2, llegará a un número impar. Por tanto, la secuencia de Collatz puede verse como una serie de grupos: cada grupo comienza con un número impar, seguido de uno o más números pares producto de las divisiones sucesivas.

Esto sugiere que lo verdaderamente determinante en el comportamiento de las secuencias son los números impares, siendo los pares meros vehículos de transición.

3.2 El "salto" entre secuencias

Cuando aplicamos 3n+1 a un número impar, generamos un número par que pertenece a otra "familia" o secuencia. Este par, al dividirlo sucesivamente entre 2, llegará a otro impar, creando así un patrón de "saltos" entre diferentes secuencias de números.

Por ejemplo, partiendo del 112:

- 112/2=56, 56/2=28, 28/2=14, 14/2=7 (fin de la primera secuencia)
- 3*7+1=22, 22/2=11 (fin de la segunda secuencia)
- 3*11+1=34, 34/2=17 (fin de la tercera secuencia)
- Y así sucesivamente hasta llegar a 1

4. CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS IMPARES

Un descubrimiento clave es que no todos los números impares contribuyen de la misma manera al comportamiento de las secuencias. Podemos clasificar los impares en tres tipos según su forma módulo 6:

1. Impares de la forma 6n+1: Sus dígitos suman 1, 7, 4
2. Impares de la forma 6n+3: Sus dígitos suman 3, 9, 6
3. Impares de la forma 6n+5: Sus dígitos suman 5, 2, 8

Esta clasificación resulta fundamental para entender el comportamiento del algoritmo.

5. UNA VARIACIÓN REVELADORA DEL ALGORITMO

La variación que propongo modifica el algoritmo original introduciendo una distinción crítica entre tipos de números impares:

- Si n es par: n/2
- Si n es impar de la forma 4n+1: 3n+1
- Si n es impar de la forma 4n+3: 3n-1

Esta variación también conduce invariablemente al valor 1 para cualquier número natural inicial, pero con una diferencia crucial: todos los números impares siguen una trayectoria estrictamente descendente.

5.1 Ejemplos comparativos

Ejemplo con el número 46:

- Con la variación: 46, 23, 68, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
- Todos los impares (23, 17, 13, 5, 1) siguen una trayectoria descendente

Ejemplo con el número 78:

- Con la variación: 78, 39, 116, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 32, 16, 8, 4, 2, 1
- Todos los impares (39, 29, 11, 1) siguen una trayectoria descendente

6. LA RAÍZ DEL COMPORTAMIENTO CAÓTICO

El hallazgo central de esta investigación es que los números impares de la forma 4n+3 son los principales responsables del comportamiento aparentemente caótico de las secuencias de Collatz originales.

En el algoritmo original, cuando aplicamos 3n+1 a cualquier impar, existe la posibilidad de un incremento significativo. Sin embargo, este incremento es particularmente problemático para los impares de la forma 4n+3, ya que generan valores que pueden desencadenar "explosiones" en la secuencia.

Al modificar la operación para estos impares específicos (aplicando 3n-1 en lugar de 3n+1), neutralizamos precisamente el origen del comportamiento caótico, transformando un sistema aparentemente impredecible en uno mucho más estructurado.

7. ESTRUCTURA FRACTAL DE LAS SECUENCIAS

7.1 El "árbol" de los impares

He descubierto que los números impares forman un entramado fractal interconectado. Existen dos fórmulas que permiten calcular todos los impares que "llegan" a un impar dado m:

- Para impares de la forma 6n+1: 1/3(m*4^n-1)
- Para impares de la forma 6n+5: 1/6(m*4^n-2)

Significativamente, no existe ningún número impar que llegue a los impares del tipo 6n+3.

7.2 La estructura de carreteras y desvíos

Para visualizar esta estructura fractal, propongo la metáfora de un sistema de carreteras con desvíos:

Imaginemos una carretera principal llamada "ruta 1". Al recorrerla encontramos desvíos a derecha e izquierda que conducen a otras carreteras. Algunas de estas carreteras son "sin salida" (correspondientes a los impares de la forma 6n+3), mientras que otras conectan con nuevas carreteras formando un entramado infinito.

Cualquier número impar puede verse como un vehículo en una carretera específica. Al aplicarle 3n+1 y las sucesivas divisiones entre dos, está transitando por este entramado de carreteras hasta eventualmente llegar a la "ruta 1".

7.3 Modelo probabilístico

Si continuamos con la analogía, podemos imaginar un edificio con infinitos pisos numerados con impares. En cada piso hay tres ascensores:

- Un ascensor sube al piso (3*m+1)/2
- Un ascensor baja al piso (m-1)/4
- Un ascensor baja al (3*m+1)/4

Dos de los tres ascensores van a pisos inferiores y solo uno siempre va a pisos superiores. Esto significa que las probabilidades sobre tres son dos que bajan y una que sube. Con infinitas oportunidades de elegir, pero con el doble de probabilidad de descender, eventualmente llegaremos al primer piso.

8. DEMOSTRACIÓN POR ENFOQUE ALTERNATIVO

Un enfoque alternativo que propongo es eliminar completamente los números pares de la secuencia y trabajar solo con impares.

Dado un número impar m, calculamos (m-1)/4. El resultado será:

- Un número impar (continuamos con él)
- Un número par (la secuencia termina con m)
- Un número decimal (aplicamos (3m+1)/2 y continuamos)

Siguiendo estas reglas, podemos demostrar que cualquier secuencia de impares eventualmente llega al 1.

9. IMPLICACIONES MATEMÁTICAS

9.1 Topología del problema

La distinción entre impares según su forma residual modifica fundamentalmente la topología del espacio de secuencias. En lugar de un comportamiento "fractal" caótico, obtenemos trayectorias más regulares y predecibles.

9.2 Cotas y tiempos de parada

Una consecuencia inmediata de esta regularización es la reducción drástica en los "tiempos de parada" (número de iteraciones hasta alcanzar el valor 1) y en los valores máximos alcanzados durante la secuencia.

Para casi cualquier número inicial, la variación propuesta converge en significativamente menos pasos que el algoritmo original.

10. CONCLUSIONES

La aparente complejidad de la conjetura de Collatz podría ser principalmente una consecuencia de no distinguir adecuadamente entre diferentes tipos de números impares. Esta perspectiva ofrece nuevos caminos hacia la comprensión completa de uno de los problemas abiertos más fascinantes de la matemática.

Las claves principales de esta investigación son:

1. Los números impares de la forma 4n+3 son los principales responsables del comportamiento caótico de las secuencias de Collatz.
2. Al modificar el tratamiento de estos impares específicos, transformamos un sistema caótico en uno estructurado y predecible.
3. La estructura subyacente del problema puede entenderse como un fractal infinito, con propiedades probabilísticas que garantizan la convergencia a 1.
4. La conjetura de Collatz es demostrable mediante FRACTALES y PROBABILIDADES.

Nota del autor: Este documento representa la síntesis de mis investigaciones como matemático aficionado e independiente. Aunque se ha procurado mantener el mayor rigor posible, el enfoque es principalmente intuitivo y exploratorio, no formal o riguroso en el sentido matemático tradicional. Las metáforas y visualizaciones propuestas pretenden ofrecer una comprensión intuitiva del problema más que una demostración formal.